対数法則に従うシーア流中での乱流拡散方程式の新しい項

松　岡　春　樹*

New Terms in the Equation of Turbulent Diffusion in the Shear Flow Obeying "Log-law"

Haruki MATSUOKA

(Received Oct. 15, 1971)

It is demonstrated theoretically that new terms shoud be inserted in the equation of turbulent diffusion in the atmospheric surface layer. The terms are originated from the fact that mixing lengths from the upper levels are not equal to those from the lower levels in the mean and the mean difference is finite and proportional to the height.

1　は じ め に

Lettau (1952)[1] は，地表近くの大気乱流境界層におけるようなシーアのある層内での拡散では普通の乱流拡散方程式に新しい一項を追加しなければならないことを主張していたが，著者 (1961)[2] は更に，対蹠的なもう一つの項を付加すべきことを示し，これを接地気層内の線源拡散に適用して，分散時間の短い場合と長い場合に対する解を与え，既存の実験結果と対比してその験証の一端に当てた。この項の重要さについては，後に Gee and Davies (1964)[3] によっても定量的に検討され確認された。最近，Brutsaert (1970)[4] は，この項の存在は今や実験的には確固として確立されたと述べている。

本論文では，著者が最近の論文 (1968, 1971)[5),6)] で示したような，$\overline{z'} \neq 0$ である接地気層のシーア流では，更に新しい項が付加されるべきことを示そうと思う。

2　拡散方程式の導出

今，χ を，拡散物質の単位体積当りの濃度；u, v, w を流体粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ の x, y, z 成分；x：平均流速の方向，z：鉛直上方向とすると，拡散物質の質量保存則

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\mathrm{div}(\chi \boldsymbol{v}) \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

および，流体の質量保存則（非圧縮と仮定）

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

（ただし，t は時間）から，

$$\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'\chi'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\chi'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{w'\chi'}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

がえられる。ただし，$\overline{\chi} = \chi + \chi'$, $u = \bar{u}(z) + u'$, $v = v'$, $w = w'$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$, バーオペレーションは平均であって，ensemble mean としよう。

今

$$\chi' \sim -\left(t'\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + x'\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x} + y'\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial y} + z'\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial z}\right) + \text{higher order terms} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

とおけると仮定（比例定数を δ とするする）ここで，$\boldsymbol{r'} = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ は流体粒子の乱流流跡の径ベクトルで，t' はその旅行時間であって，共に，以前の論文 (1961)[2] で用いたものである。従って，この z' は，最近の論文 (1968, 1971)[5),6)] での z' とは符号だけ逆になる。(4)を(3)に代入すると

$$\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \bar{u}(z)\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\overline{u't'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \delta\overline{u'x'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x} + \delta\overline{u'y'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial y} + \delta\overline{u'z'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\overline{v't'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} + \delta\overline{v'x'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x} + \delta\overline{v'y'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial y} + \delta\overline{v'z'}\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial z}\right)$$

* 教育学部自然科学科

$$+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\delta\overline{w't'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t}+\delta\overline{w'x'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}+\delta\overline{w'y'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}$$

$$+\delta\overline{w'z'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}\Big)+\text{higher order terms}\cdots\cdots\cdots(5)$$

ここで乱流の y 方向の統計的対称性を考慮（仮定）すると

$$\overline{u'y'}=\overline{v'x'}=\overline{v'z'}=\overline{w'y'}=0,\ \overline{v't'}=0$$

また，前の論文[2),5),6)]で著者が行ったように $u'=-\lambda w'$ (λ=const≈1）と仮定（モデル）すると，これらの論文を参照して

$$\overline{u't'}=-\lambda\overline{w't'}=-\lambda\overline{z'}>0,\ \overline{w't'}=\overline{z'}<0,$$

$$\overline{u'x'}(=-\lambda\overline{w'x'})=\overline{u'(\bar{u}+u')t'}=-\lambda\overline{w't'}\bar{u}$$

$$-\lambda\overline{w't'u'}=-\lambda\overline{z'}\bar{u}-\lambda\overline{z'u'}\approx-\lambda\overline{z'}\bar{u}+\lambda\overline{z'^2}\frac{d\bar{u}}{dz},$$

etc.

以上を(5)に代入すると

$$\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t}+\bar{u}(z)\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{-\lambda\overline{z'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t}}-\underbrace{\lambda\overline{z'}\bar{u}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}}$$

$$+\lambda^2K_z\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}-\lambda K_z\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(K_y\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial y}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\underbrace{\overline{z'}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t}}+\underbrace{\overline{z'}\bar{u}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}}-\lambda K_z\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial x}+K_z\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}\Big)$$

$$+\text{higher order terms}\qquad\cdots\cdots\cdots(6)$$

ただし，$K_z=\delta\lambda^{-1}\overline{z'^2}d\bar{u}/dz,\ K_y=\delta\overline{v'y'}$

(6)が得られた拡散方程式であるが，higher order terms は省略しうるものとすると，（　）の中のアンダーラインの4つの項が今回提案する新しい項であって，$\overline{z'}\neq0$ が必要なことを示している。

3 新しい4つの項について

$\lambda\approx1$，$\overline{z'}\approx-\kappa^2\lambda z/2$（文献5の4・1節参照），$\bar{u}=(v_*/\kappa)\ln(z/z_0)$，$K_z\approx v_*\kappa z$，$\kappa\approx0.40$，$z_0$ は通常 1 cm 以下，v_* は通常 1 m/s のオーダー，（$\delta\approx1$ と仮定)。これらを，(6)の（　）の中で，アンダーラインの項と他の項に当てはめて比較すると，新しい4つの項は重要な項であることが直ちに判明する。例えば，$\overline{z'}\bar{u}\partial\bar{\chi}/\partial x$ と $-\lambda K_z\partial\bar{\chi}/\partial x$ とを比べると，その比の値は（1/2）$\ln(z/z_0)$ となるから，$z\gg z_0$ では新しい項の方が絶対値が大であり，z が大となるに従い益々重要となる。また，アンダーラインの項のうち時間的変化率を含む項については，$\overline{z'}\propto z$ であるから，z の増大とともにこの因子が効果的となる。定常拡散では勿論この項は消える。

アンダーラインの4つの項の意味は導出の過程から明かであろう。

4つの新しい項は，何れも $\overline{z'}\neq0$ なることが必要であるが，これは，乱流の鉛直方向の〝混合距離〟が，上からと下からとでは，平均的にみて等しくなく，有限の大きさ（z に比例）だけの違いのあることのためにでてきた項であるといえよう。

4 あとがき

本論文では，アンダーラインの4つの項だけについてその重要さを指摘した。省略した higher order terms は重要ではないとはいいきれない理由があるが，この点については別の機会に論ずることにし，ここでは上記の指摘にとどめた。

また，本論文では，例えば流れに垂直に水平におかれた連続線源からの拡散の場合でいうと，大きい分散時間に対する扱いとなっているが，小さい分散時間の場合には，以前[2)]に行ったような修正を行う必要もあるが，このことについても別の機会に論ずることにしたい。

具体的な拡散問題へ適用して解を求めたりすることも後の機会に行ないたい。

文　献

1) Lettau, H. (1952) : On the eddy diffusion in shear zones M. I. T. Symposium. Geophys. Res. Pap., No. 19, 437～445
2) Matsuoka, H. (1961) : Note on two-dimensional diffusion in the atmospheric surface layer. J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II, 39, 324- 330
3) Gee, J. H. and D. R. Davies (1964) : A further note on horizontal dispersion from an instantaneous ground source, Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 90, 478～480
4) Brutsaert, W. (1970) : On the anisotropy of the eddy diffusivity. J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II, 48, 411～416
5) 松岡春樹 (1968)：カルマン定数の一表現，福井大工報 16, 321～326
6) 松岡春樹 (1971)："カルマン定数の一表現" についての注意，福井大工報 19，189～190

(昭和46年10月15日　受理)